



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 21.02.201**  
**CLASA A V-A**  
**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE**

**Subiectul I**

a) Calculați:  $13^5 : 13^2 + \left\{ (17^3)^5 : 17^{14} + 2 \cdot \left[ (2^3 \cdot 5^2)^4 : 100^4 + 253 : 23 \right] - (2^8 - 2^2) \right\}$ .

b) Arătați că numărul  $x = \overline{74a} + \overline{4a7} + \overline{a74}$  este divizibil cu 37, oricare ar fi cifra nenulă  $a$ .

Delia Badea, Râmnicu Vâlcea

**Soluție**

a)  $13^5 : 13^2 = 13^3 = 2197$  ..... 0,5p

$(17^3)^5 : 17^{14} = 17$  ..... 1p

$(2^3 \cdot 5^2)^4 : 100^4 = 2^4 = 16$  ..... 1p

$2^8 - 2^2 = 256 - 4 = 252$  ..... 0,5p

Răspuns final: 2016 ..... 1p

b)  $x = 740 + a + 407 + 10a + 100a + 74$  ..... 1p

$x = 1221 + 111a$  ..... 1p

$x = 37(33 + 3a) : 37$  ..... 1p



## Subiectul II

a) Aflați restul împărțirii numărului  $a = 2017 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2016)$  la 2016.

b) Arătați că suma primelor 2017 numere impare este pătrat perfect.

c) Scrieți numărul  $2017^2$  ca sumă de 2017 numere naturale consecutive.

Cristina Pîrvuță, Râmnicu Vâlcea

## Soluție

a)  $1 + 2 + 3 + \dots + 2016 = 2016 \cdot 2017 : 2$  ..... 1p

$a = 2017^2$  ..... 1p

Finalizare: R = 1 ..... 1p

b)  $1 = 2 \cdot 0 + 1$ ;  $3 = 2 \cdot 1 + 1$ ;  $5 = 2 \cdot 2 + 1$ ; ...;  $4033 = 2 \cdot 2016 + 1$  ..... 1p

$S = 1 + 3 + 5 + \dots + 4033 = 2017^2$  este pătrat perfect ..... 1p

c)  $a + (a + 1) + (a + 2) + \dots + (a + 2016) = 2017^2$  ..... 1p

$a = 1009 \Rightarrow 2017^2 = 1009 + 1010 + 1111 + \dots + 3025$  ..... 1p



### Subiectul III

Să se determine numerele naturale  $a$  și  $b$  a căror sumă este egală cu 323, știind că împărțindu-l pe  $a$  la  $b$  se obține câtul 16 și restul nenul.

Dumitru Dobre, Râmnicu Vâlcea

### Soluție

$$a + b = 323 \dots\dots\dots 1p$$

$$a = 16b + r, \quad 0 < r < b \dots\dots\dots 1p$$

$$17b + r = 17 \cdot 19 \Rightarrow r : 17 \Rightarrow r = 17k, k \in \mathbf{N}^* \dots\dots\dots 1p$$

$$17b + 17k = 17 \cdot 19 \Rightarrow b + k = 19 \dots\dots\dots 1p$$

$$r < b \Rightarrow 17k < b \Rightarrow 18k < b + k = 19 \Rightarrow k = 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Finalizare: } a = 305 \text{ și } b = 18 \dots\dots\dots 2p$$

### Subiectul IV

Un număr natural se numește *cub bipătratic* dacă este cub perfect și se scrie ca suma a două pătrate perfecte nenule diferite. Un număr natural se numește *pătrat bicubic* dacă este pătrat perfect și se scrie ca suma a două cuburi perfecte nenule diferite.

- Dați un exemplu de cub bipătratic și un exemplu de pătrat bicubic.
- Arătați că există o infinitate de cuburi bipătratice și o infinitate de pătrate bicubice.

Cătălin Cristea, Craiova, G.M.

### Soluție

- a) Exemplu de cub bipătratic:  $125$  ..... 1p  
Justificare:  $5^3 = 10^2 + 5^2$  ..... 1p  
Exemplu de pătrat bicubic:  $9$  ..... 1p  
Justificare:  $3^2 = 1^3 + 2^3$  ..... 1p
- b)  $(10k^3)^2 + (5k^3)^2 = 100k^6 + 25k^6 = 125k^6 = (5k^2)^3, k \in \mathbf{N}^*$  ..... 1p  
Există o infinitate de cuburi bipătratice  $a_k = (5k^2)^3 = (10k^3)^2 + (5k^3)^2, k \in \mathbf{N}^*$  ..... 0,5p  
 $(p^2)^3 + (2p^2)^3 = p^6 + 8p^6 = 9p^6 = (3p^3)^2, p \in \mathbf{N}^*$  ..... 1p  
Există o infinitate de pătrate bicubice  $b_p = (3p^3)^2 = (p^2)^3 + (2p^2)^3, p \in \mathbf{N}^*$  ..... 0,5p



---

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 21.02.201**  
**CLASA A VI-A**  
**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE**

**Subiectul I**

Aflați numerele prime  $a, b, c$ , știind că verifică simultan relațiile  $c - ab = 15$  și  $c - a^2 = 49$ .

S.G.M. 12/2015

**Soluții și bareme**

$$ab - a^2 = 34 \dots\dots\dots 2p$$

$$a(b - a) = 34 \dots\dots\dots 1p$$

$$a \in D_{34} \quad a \in \{2, 17\} \dots\dots\dots 1p$$

$$a = 2 \Rightarrow b = 19; c = 53 \dots\dots\dots 1p$$

$$a = 17 \Rightarrow b = 19; c = 338 \text{ nu convine} \dots\dots\dots 1p$$



## Subiectul II

- a) Descompuneți în factori primi numărul 2015.
- b) Arătați că fracția  $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2014 + 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2014 \cdot 2016 + 1}$  este ireductibilă.

Statie Ileana, Rm.Vâlcea

## Soluții și bareme

- a)  $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ .....1p
- b) Fie  $d = \text{c.m.m.d.c.}$  al numărătorului și numitorului
- $d \mid 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2014 + 1$  și  $d \mid 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2014 \cdot 2016 + 1$ .....1p
- $d \mid (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2014 + 1) \cdot 2016$ .....1p
- $d \mid 2015$ .....1p
- $d = 2015$  imposibil .....2p
- $d = 1 \Rightarrow$  fracția este ireductibilă.....1p

**Subiectul III**

Se dau unghiul  $\angle AOB$  cu măsura de  $150^\circ$  și unghiul  $\angle COD$  drept, astfel încât punctele  $C$  și  $D$  se află în semiplane opuse față de dreptele  $OA$  și  $OB$ . Aflați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor  $\angle AOC$  și  $\angle BOD$ .

Statie Alexandru, Rm.Vâlcea

**Soluții și bareme**Notez  $m(\angle BOD)$  cu  $2x$ .**Caz I.** ( $OC$  se află în interiorul unghiului  $AOB$ )

$$m(\angle BOC) = 90^\circ - 2x \dots\dots\dots 1p$$

$$m(\angle AOC) = 60^\circ + 2x \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Măsura unghiului format de bisectoare} = 120^\circ \dots\dots\dots 1p$$

**Caz II.** ( $OD$  se află în interiorul unghiului  $AOB$ )

$$m(\angle AOC) + 90^\circ + 150^\circ - 2x = 360^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$m(\angle AOC) = 120^\circ + 2x \dots\dots\dots 1p$$

$$m(\angle BOC) = 90^\circ - 2x \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Măsura unghiului format de bisectoare} = 120^\circ \dots\dots\dots 1p$$

## Subiectul IV

Fie **A,B,C,D** pe dreapta **d** astfel încât  $[CD] \subset [AB]$  și  $[AC] \equiv [BD]$ . Arătați că:

- $[AB]$  și  $[CD]$  au același mijloc.
- Dacă se colorează punctele drepte cu 2 culori alb și roșu, atunci există 3 puncte de aceeași culoare astfel încât unul este mijlocul segmentului determinat de celelalte 2.

Burlan Adrian, Rm.Vâlcea

### Soluții și bareme

Fie  $M$  –mij.  $[CD] \Rightarrow \begin{matrix} MC = MD \\ \text{dar } AC = DB \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} MA = MB \\ M \in [AB] \end{matrix} \Rightarrow M \text{ mijlocul } [AB] \dots\dots\dots 1p$

Fiind date 5 puncte pe dreapta conform principiului cutiei exista 2 puncte colorate cu aceeași culoare. ....1p

Fără a restrânge generalitatea presupunem A, B albe și C, D roșii.

Alegem convenabil o unitate de măsură astfel încât  $A(0); B(1); C(2); D(3) \dots\dots\dots 1p$

Deci  $AC=DB$  și  $[CD] \subset [AB] \dots\dots\dots 1p$

Fie  $M$  –mij.  $[CD] \Rightarrow M$  –mij.  $[AB] \dots\dots\dots 1p$

✓ Dacă  $M$ -roșu  $\Rightarrow C-M-D$  verific. ....1p

✓ Dacă  $M$  –alb  $\Rightarrow A-M-D$  verifică. ....1p

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 21.02.201

CLASA A VII-A

## SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE

## Subiectul I

- a) Să se arate că există numere iraționale  $x$  pentru care  $\sqrt{3-x^2}$  este număr rațional.
- b) Există numere raționale  $x$  pentru care numărul  $\sqrt{3-x^2}$  să fie rațional? Justificați răspunsul dat.

G.M. nr. 4/2015 - Ion Băetu, Botoșani

## Soluții și bareme

a) De exemplu  $x = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3-x^2} = 1 \in \mathbb{Q}$  sau oricare alt exemplu bun .....3p

b) Presupunem că există numere raționale  $x$  pentru care  $\sqrt{3-x^2}$  este rațional.

Notăm cu  $\frac{m}{n}$  și  $\frac{p}{q}$  fracțiile ireductibile care reprezintă numerele raționale  $x$ , respectiv  $\sqrt{3-x^2}$ , cu  $m, n$ ,

$p, q \in \mathbb{N}^*$ ,  $(m, n) = 1$ ,  $(p, q) = 1$ .

Avem  $\sqrt{3-\left(\frac{m}{n}\right)^2} = \frac{p}{q}$  și ridicând la pătrat obținem:  $3n^2q^2 = m^2q^2 + n^2p^2$  (1). .....1p

Din  $\left. \begin{matrix} n^2 \mid m^2q^2 + n^2p^2 \\ n^2 \mid n^2p^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow n^2 \mid m^2q^2 \Rightarrow n \mid mq$ . Având  $(m, n) = 1 \Rightarrow n \mid q$  (2). .....0,5p

Din  $\left. \begin{matrix} q^2 \mid m^2q^2 + n^2p^2 \\ q^2 \mid m^2q^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow q^2 \mid n^2p^2 \Rightarrow q \mid np$ . Având  $(q, p) = 1 \Rightarrow q \mid n$  (3). .....0,5p

Din (2) și (3) rezultă  $n = q$ . Relația (1) devine  $3n^2 = m^2 + p^2 \Leftrightarrow m^2 + p^2 = 3n^2$  (4). .....0,5p

Un pătrat perfect poate avea una din formele  $3n^2$  sau  $3n^2 + 1$ . Dacă suma a două pătrate perfecte este multiplu de 3, atunci fiecare este multiplu de 3. Avem deci  $m = 3a$  și

$p = 3b$  ( $a, b \in \mathbb{N}^*$ ) (5) .....1p

Din (4) și (5) avem:  $3n^2 = 9a^2 + 9b^2 \Leftrightarrow n^2 = 3(a^2 + b^2) \Rightarrow 3 \mid n^2 \Rightarrow 3 \mid n \Rightarrow n = 3c$ ,  $c \in \mathbb{N}^*$ .

Din  $m = 3a$  și  $n = 3c$  avem, deci,  $(m, n) \neq 1$  - contradicție! .....0,5p

**Subiectul II**

Se consideră numerele:  $S_1 = [\sqrt{1 \cdot 2}]$ ,  $S_2 = [\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}]$ , ...,  $S_n = [\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 4}] + \dots + [\sqrt{n \cdot (n+1)}]$ , unde prin  $[a]$  am notat partea înțrăgă a numărului  $a$  și  $n$  este un număr natural nenul.

a) Calculați  $S_{63}$ b) Demonstrați că numărul  $A = \sqrt{2 \cdot S_n + n}$  nu este rațional, oricare ar fi numărul natural nenul  $n$ .

Constantin Popescu, Șc. Gim. „Take Ionescu” Râmnicu Vâlcea

**Soluții și bareme**a) Pentru  $i \in N, i \geq 1$  avem  $i^2 < i(i+1) < (i+1)^2 \Leftrightarrow \dots \dots \dots 1p$  $i < \sqrt{i(i+1)} < i+1 \Rightarrow \dots \dots \dots 1p$  $[\sqrt{i(i+1)}] = i, \forall i \in N^* \quad (1) \dots \dots \dots 1p$ Aplicând relația (1), termen cu termen, sumei  $S_{63}$  avem: $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + 63 = \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016 \dots \dots \dots 1p$ b) Aplicând relația (1), termen cu termen, sumei  $S_n$ , avem: $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \dots \dots \dots 0,5p$  $A = \sqrt{n(n+1) + n} = \sqrt{n^2 + 2n} \dots \dots \dots 0,5p$ 

Avem  $n^2 < n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ , deci numărul  $n^2 + 2n$ , fiind cuprins strict între două pătrete perfecte, nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural nenul  $n$ .  
 $\dots \dots \dots 1p$

Rădăcina pătrată a unui număr natural, care nu este pătrat perfect, nu este un număr rațional. Avem, deci,

 $A = \sqrt{2 \cdot S + n} = \sqrt{n^2 + 2n} \notin Q \dots \dots \dots 1p$

### Subiectul III

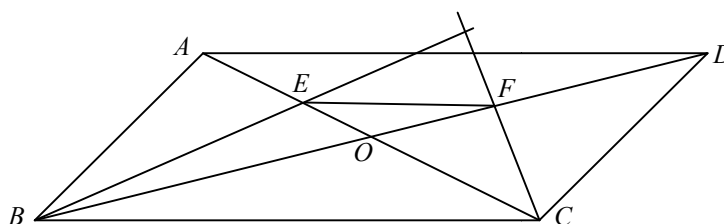
Fie  $ABCD$  un paralelogram cu  $BC > 2 \cdot AB$ . Bisectoarea unghiului  $ABC$  intersectează diagonala  $AC$  în punctul  $E$ , iar bisectoarea unghiului  $DCB$  intersectează diagonala  $BD$  în punctul  $F$ .

a) Arătați că aria triunghiului  $AEB$  este egală cu aria triunghiului  $CFD$ .

b) Demonstrați că dreapta  $EF$  este paralelă cu dreapta  $BC$ .

Constantin Popescu, Șc. Gim. „Take Ionescu” Râmnicu Vâlcea

### Soluții și bareme



a)  $\frac{A_{AEB}}{A_{ABC}} = \frac{AE}{AC}$  (1) .....0,5p

$\frac{A_{CFD}}{A_{DBC}} = \frac{DF}{BD}$  (2) .....0,5p

Din teorema bisectoarei avem:

$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AB+BC}$  (3) .....0,5p

$\frac{DF}{BF} = \frac{CD}{BC} \Leftrightarrow \frac{DF}{BD} = \frac{CD}{CD+BC}$  (4) .....0,5p

Din  $AB = CD$  (laturi opuse în paralelogram), (4), (3), (2) și (1),

rezultă  $\frac{AE}{AC} = \frac{DF}{BD}$  (5)  $\Rightarrow \frac{A_{AEB}}{A_{ABC}} = \frac{A_{CFD}}{A_{DBC}}$  (6). .....0,5p

Din  $AD \parallel BC \Rightarrow d(A, BC) = d(D, BC) = d(AD, BC) \Rightarrow$  .....0,5p

$A_{ABC} = \frac{BC \cdot d(AD, BC)}{2} = A_{DBC}$  (7). .....0,5p

Din (6) și (7) găsim  $A_{AEB} = A_{CFD}$  .....0,5p

b) Fie  $AC \cap BD = \{O\}$ . Avem  $AC = 2AO = 2(OE + AE)$  și  $BD = 2DO = 2(OF + DF)$  ( diagonalele paralelogramului se înjumătățesc). .....0,5p

Din relația (5) avem:

$\frac{AE}{AC} = \frac{DF}{BD} \Leftrightarrow \frac{AE}{2(OE + AE)} = \frac{DF}{2(OF + DF)} \Leftrightarrow \frac{AE}{OE + AE} = \frac{DF}{OF + DF} \Leftrightarrow \frac{AE}{OE} = \frac{DF}{OF}$  .....1,5p

$\Leftrightarrow \frac{OE}{EA} = \frac{OF}{FD} \Leftrightarrow EF \parallel AD$  (reciproca teoremei lui Thales). Din  $BC \parallel AD \Rightarrow EF \parallel BC$  .....1p

#### Subiectul IV

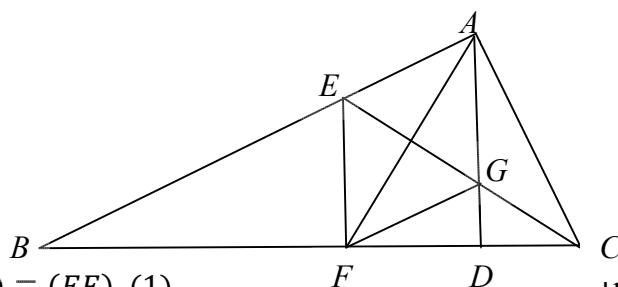
Fie  $ABC$  un triunghi dreptunghic cu  $m(\angle A) = 90^\circ$ ,  $AD \perp BC$ ,  $D \in (BC)$ . Bisectoarea unghiului  $ACB$  intersectează dreapta  $AD$  în punctul  $G$  și latura  $AB$  în punctul  $E$ . Se notază cu  $F$  piciorul perpendicularei din  $E$  pe latura  $BC$ .

a) Arătați că patrulaterul  $AEFG$  este romb.

b) Dacă triunghiul  $AEG$  este echilateral, aflați raportul dintre aria patrulaterului  $AEFG$  și aria triunghiului  $ABC$ .

Tiberiu Pigui, Liceul „Antim Ivireanu”, Râmnicu Vâlcea

#### Soluții și bareme



a) Din proprietatea bisectoarei avem:

$$EA = d(E, CA) = d(E, CB) = EF \Rightarrow (EA) \equiv (EF) \quad (1) \dots\dots\dots 1p$$

$$m(\angle AEG) = 90^\circ - m(\angle ACE) = 90^\circ - m(\angle GCD) = m(\angle DGC) = m(\angle AGE) \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \angle AEG \equiv \angle AGE \Rightarrow \triangle AEG \text{ este isoscel} \Rightarrow (EA) \equiv (GA) \quad (2) \dots\dots\dots 0,5p$$

Din (1) și (2) avem  $(EF) \equiv (GA) \quad (3)$ .

$$\text{Avem } \left. \begin{array}{l} GA \perp BC \\ EF \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow EF \parallel GA \quad (4) \dots\dots\dots 0,5p$$

Din (3) și (4) avem  $AEFG$  paralelogram și din (2) rezultă că este romb.  $\dots\dots\dots 1p$

b)  $AEFG$  romb  $\Rightarrow CE \perp AF$ , deci  $CE$  este bisectoare și înălțime în triunghiul  $AFC$

$$\Rightarrow \triangle AFC \text{ este isoscel.} \quad (5) \dots\dots\dots 0,5p$$

$$m(\angle ACF) = m(\angle ACD) = 90^\circ - m(\angle DAC) = 90^\circ - [90^\circ - m(\angle EAG)] = 60^\circ \quad (6)$$

Din (5) și (6)  $\Rightarrow \triangle AFC$  este echilateral.  $\dots\dots\dots 0,5p$

În  $\triangle AFC$  echilateral, înălțimile  $AD$  și  $CE$  sunt și mediane, deci  $G$  este centrul de greutate al triunghiului

$$AFC \Rightarrow AG = \frac{2}{3} AD \quad (7) \dots\dots\dots 0,5p$$

$$m(\angle B) = 90^\circ - m(\angle ACB) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow$$

$$FD = \frac{1}{2} FC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} BC = \frac{1}{4} BC \text{ (teorema unghiului de } 30^\circ) \quad (8) \dots\dots\dots 0,5p$$

Din (7) și (8) avem:

$$A_{AEFG} = AG \cdot FD = \frac{2}{3} AD \cdot \frac{1}{4} BC = \frac{1}{3} \cdot \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{1}{3} A_{ABC}. \text{ Raportul cerut este } \frac{1}{3}. \dots\dots\dots 1p$$

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 21.02.201**  
**CLASA A VIII-A**  
**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE**

**Subiectul I**

Se consideră numărul  $a = \sqrt{7 + \sqrt{33}} - \sqrt{7 - \sqrt{33}}$ .

a) Arătați că  $a^2$  este număr natural; (2p)

b) Dacă  $b = (a - 2)^{2016}$ , aflați partea întreagă a numărului b; (2p)

c) Știind că  $c = (a^4 + a^3 - 6a^2 - 6a - 1)^{2016}$ , stabiliți dacă  $c \in (0, 2)$ . (3p)

Duță Elena Mihaela, Lic.Tehn. "G-ral Magheru" Rm. Vâlcea

**Barem de corectare**

a)  $a^2 = \left( \sqrt{7 + \sqrt{33}} - \sqrt{7 - \sqrt{33}} \right)^2 = 7 + \sqrt{33} - 2\sqrt{49 - 33} + 7 - \sqrt{33} = 6 \in \mathbb{N}$  ..... 2p

b) Avem:  $2 < \sqrt{6} < 3 \Rightarrow 0 < \sqrt{6} - 2 < 1 \Rightarrow 0^{2016} < (\sqrt{6} - 2)^{2016} < 1^{2016}$  ..... 1p

$\Rightarrow 0 < b < 1 \Rightarrow [b] = 0$  ..... 1p

c)  $c = (a^4 + a^3 - 6a^2 - 6a - 1)^{2016} = \left[ a^2(a^2 - 6) + a(a^2 - 6) - 1 \right]^{2016}$  ..... 2p

$= (-1)^{2016} = 1 \in (0, 2)$  ..... 1p

**Subiectul II**

Fie numerele  $a, b, c \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Arătați că :

a)  $\sqrt{4a^2 + 4b^2 + c^4} + \sqrt{4a^2 + 4c^2 + b^4} + \sqrt{4c^2 + 4b^2 + a^4} = 5;$  (4p)

b)  $-\sqrt{3} \leq a + b + c \leq \sqrt{3}.$  (3p)

Gheorghe Radu, C.N.I. "Matei Basarab" Rm. Vâlcea

**Barem de corectare**

a)  $4a^2 + 4b^2 + 4c^2 = 4 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 = 4 - 4c^2$ . Analog celelalte..... 1p

$$\sqrt{4a^2 + 4b^2 + c^4} + \sqrt{4a^2 + 4c^2 + b^4} + \sqrt{4c^2 + 4b^2 + a^4} =$$

$$= \sqrt{4 - 4c^2 + c^4} + \sqrt{4 - 4b^2 + b^4} + \sqrt{4 - 4a^2 + a^4} =$$

$$= \sqrt{(2 - c^2)^2} + \sqrt{(2 - b^2)^2} + \sqrt{(2 - a^2)^2} = |2 - c^2| + |2 - b^2| + |2 - a^2| \dots\dots 2p$$

$$= 6 - (a^2 + b^2 + c^2) = 6 - 1 = 5 \dots\dots\dots 1p$$

b) Din inegalitatea  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$  rezultă:  $ab + bc + ac \leq 1$  .....1p

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) \leq 1 + 2 = 3 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Leftrightarrow |a + b + c| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq a + b + c \leq \sqrt{3} \dots\dots\dots 1p$$

### Subiectul III

În cubul ABCDA'B'C'D' se notează cu P proiecția punctului C' pe diagonala A'C. Demonstrați că dreptele AP și D'P sunt perpendiculare.

G.M. Nr. 10 / 2015, Ion Voicu, Ialomița

#### Barem de corectare

Notează  $AB = a$  și calculează:  $AC = a\sqrt{2}$ ,  $A'C = a\sqrt{3}$ ,  $PC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$  și  $A'P = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$  ..... 1p

Notează cu S și T proiecțiile lui P pe AC și respectiv A'D'

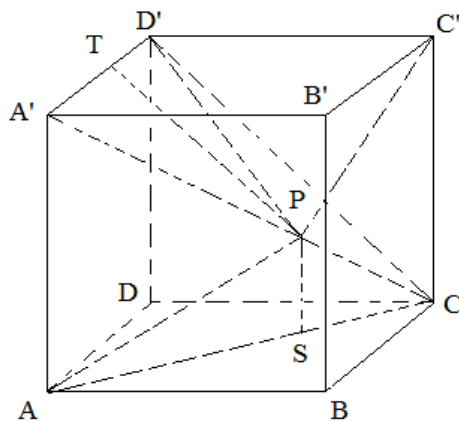
Din asemănarea triunghiurilor  $\triangle CPS$  și  $\triangle CA'A$  calculează  $PS = \frac{a}{3}$  și  $AS = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$  .....2p

Calculează  $AP = a$  în triunghiul dreptunghic  $\triangle PSA$  .....1p

Din asemănarea triunghiurilor  $\triangle A'PT$  și  $\triangle A'CD'$  calculează  $PT = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$  și  $TD' = \frac{a}{3}$  .....1p

Calculează  $D'P = a$  în triunghiul dreptunghic  $\triangle PTD'$  .....1p

Finalizează folosind Reciproca Teoremei lui Pitagora .....1p





#### Subiectul IV

Fie ABCD un trapez dreptunghic cu  $m(\angle D) = 90^\circ$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 2\text{ cm}$ ,  $DC = 6\text{ cm}$  și  $AD = 4\sqrt{3}\text{ cm}$ .  
Pe perpendiculara în D pe planul (ABC) se consideră punctul E astfel încât  $DE = 8\text{ cm}$ . Fie  $M \in (BC)$  astfel încât  $BM = 2\text{ cm}$ .

a) Demonstrați că  $AM \perp (EDM)$ ; (4p)

b) Calculați distanța de la punctul D la planul (AEM). (3p)

Marin Mazilu, C.N.I. "Matei Basarab" Rm. Vâlcea

#### Barem de corectare

a) Calculează  $BC = 8\text{ cm}$  și arată că  $\triangle DMC$  este echilateral .....1p

Prin calcul găsește  $m(\angle ADM) = 30^\circ$  și  $m(\angle DAM) = 60^\circ$  .....1p

$\Rightarrow AM \perp DM$  .....1p

$AM \perp DE$  și finalizare .....1p

b) Fie  $DF \perp EM$ ,  $F \in ME$ ,

$EM \perp AM$ ,  $DM \perp AM$  și  $EM, AM \subset (AEM) \Rightarrow$  cu  $R_2 T_3 \perp \Rightarrow DF \perp (AEM)$  .....2p

Calculează  $DF = 4,8\text{ cm}$  .....1p